ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN KIM THU

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM CỰC TRỊ CỦA CÁC HÀM PHÂN THỨC SINH BỞI SỐ TỰ NHIÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN KIM THU

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM CỰC TRỊ CỦA CÁC HÀM PHÂN THỨC SINH BỞI SỐ TỰ NHIÊN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

(Xác nhận)

GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

MỞ ĐẦU

Chuyên đề về đa thức và phân thức là một chuyên đề rất quan trọng ở bậc trung học phổ thông và trung học cơ sở. Các tính chất của đa thức và phân thức liên quan chặt chẽ với các tính chất của số nguyên và số hữu tỷ. Một trong các phương pháp khảo sát đa thức và phân thức hữu tỷ rất hữu hiệu là việc sử dụng các công cụ hữu ích từ việc khảo sát các tính chất số học của các số tự nhiên và số hữu tỷ.

Trong các kì thi học sinh giỏi toán các cấp, các bài toán liên quan tới đa thức và phân thức với hệ số nguyên (ta gọi chung là phân thức sinh bởi số tự nhiên) thường xuyên được đề cập. Những dạng toán này thường được xem là thuộc loại khó cần các kiến thức sâu sắc về số học kết hợp với các kiến thức về đa thức và phân thức thường không nằm trong chương trình chính thống của chương trình toán bậc trung học phổ thông.

Để đáp ứng nhu cầu bồi dưỡng giáo viên và bồi dưỡng học sinh giỏi về chuyên đề đa thức và phân thức với hệ số nguyên và hệ số hữu tỷ, em chọn đề tài luận văn “Một số phương pháp tìm cực trị của các hàm phân thức sinh bởi số tự nhiên”.

Mục tiêu của luận văn nhằm hệ thống một số kiến thức về số học và đa thức với hệ số nguyên và cung cấp một số phương pháp tìm cực trị của các hàm phân thức sinh bởi số tự nhiên. Tiếp theo, xét các bài toán cực trị, khảo sát phương trình, bất phương trình cùng một số dạng liên quan.

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận và ba chương.

Chương 1. Phân thức hữu tỷ với hệ số nguyên.

Chương 2. Các phương pháp giải toán cực trị dạng phân thức sinh bởi số hữu tỷ.

Chương 3. Một số dạng toán liên quan.

Tiếp theo, trong các chương đều trình bày hệ thống các bài tập áp dụng và giải các đề thi HSG quốc gia và Olympic liên quan.

Chương 1

Phân thức hữu tỷ với hệ số nguyên

1.1. Tính chất cơ bản của đa thức với hệ số nguyên

Trong phần này, trình bày một số tính chất cơ bản của đa thức với hệ số nguyên.

Định nghĩa 1.1 (xem [1]-[2]) Cho $L \subset \mathbb{R}$. Đa thức $P(x) \in \mathbb{L}[x]$ được gọi là khả quy trên $\mathbb{L}[x]$ nếu tồn tại đa thức $Q(x)$ và $T(x)$ cùng thuộc $\mathbb{L}[x]$ với các bậc lớn hơn 0 sao cho $P(x) = Q(x).T(x)$. Trong trường hợp ngược lại thì được gọi là bất khả quy trên $\mathbb{L}[x]$.

Định nghĩa 1.2 (xem [1]-[2]) Tập hợp tất cả các đa thức khả quy trên $\mathbb{L}[x]$ được ký hiệu là $\mathbb{L}^*[x]$.

Tính chất 1.1 Mọi đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ với bậc lớn hơn bằng 2 đều phân tích được thành nhân tử bậc nhất và nhân tử bậc hai nên cũng có thể coi $P(x) \in \mathbb{R}^*[x]$.

Định nghĩa 1.3 (xem [1]-[2]) Đa thức thuộc $\mathbb{Z}[x]$ được gọi là đa thức nguyên bản nếu bộ các hệ số của nó nguyên tố cùng nhau (có thể không đôi một nguyên tố cùng nhau).

Tính chất 1.2 Nếu $f(x) \in Z[x]$ thì tồn tại duy nhất một đa thức nguyên bản và một phân số tối giản $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(x) = \frac{a}{b} f_1(x)$.

Bổ đề 1.1 (Bổ đề Gauss) *Tích của hai đa thức nguyên bản là một đa thức nguyên bản.*

Chứng minh. Cho hai đa thức nguyên bản

$$P(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

và

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

thì $P(x).Q(x) = c_{m+n} x^{m+n} + c_{m+n-1} x^{m+n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$.
Giả sử tích trên không nguyên bản thì tồn tại một số nguyên tố p là ước chung của các hệ số $c_0, c_1, \ldots, c_{m+n}$.
Vì P nguyên bản nêu gọi i là số nhỏ nhất mà a_i không chia hết cho p và j là số nhỏ nhất sao cho b_j không chia hết cho p. Khi đó, xét c_{j+i} ta thấy hệ số tương ứng không chia hết cho p, vô lý. Vậy tích trên nguyên bản.

Tính chất 1.3 Nếu đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P > 1$ mà không thuộc $\mathbb{Z}^*[x]$ thì nó cũng không thuộc $\mathbb{Q}^*[x]$.

Định lý 1.1 (xem [1]-[2]) *Cho các đa thức* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $a_n \neq 0$, a, b *là hai số nguyên khác nhau. Khi đó,* $f(a) - f(b) \vdots (a - b)$.

Bổ đề 1.2 *(Khai triển Newton) Cho* n *và* m *là các số nguyên dương. Với bất kỳ* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *trong* $\mathbb{R}^n$*, ta có*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha, \tag{1.1}$$

trong đó $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$ *với* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ *trong* $\mathbb{N}^n, x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ *và tổng chạy qua tất cả* α *có thể có trong* $\mathbb{N}^n$ *thỏa mãn* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m$.

Chứng minh. Với $n = 2$ theo nhị thức Newton, ta có

$$(x_1+x_2)^m = \sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{j!(m-j)!} x_1^j x_2^{m-j} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_1!.\alpha_2!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \ \ \alpha_1 = j, \alpha_2 = m-j.$$

Giả sử đẳng thức (1.18) đã đúng cho đến $n - 1$. Đặt $X = x_1 + x_2 + .. + x_{n-1}$, $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Khi đó ta có

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^m = (X + x_n)^m = \sum_{\alpha_n=0}^{m} \frac{m!}{(m-\alpha_n)!.\alpha_n!} X^{m-\alpha_n} x_n^{\alpha_n}$$

$$= \sum_{\alpha_n=0}^{m} \frac{m!}{(m-\alpha_n)!.\alpha_n!} x_n^{\alpha_n}.(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})^{m-\alpha_n}$$
$$= \sum_{\alpha_n=0}^{m} \frac{m!}{(m-\alpha_n)!.\alpha_n!} x_n^{\alpha_n}. \sum_{|\alpha'=m-\alpha_n} \frac{(m-\alpha_n)!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_{n-1}!} x^{\alpha'}$$
$$= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots . x_n^{\alpha_n}.$$

Bổ đề được chứng minh.

Định lý 1.2 (Khai triển Taylor, xem [1]-[2]) *Cho một đa thức*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j. \tag{1.2}$$

Khi đó, hệ số thứ j của $f(x)$ có thể được biểu diễn bởi

$$a_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(0), \tag{1.3}$$

trong đó $f^{(j)}(0)$ ứng với đạo hàm cấp j tại 0

Bổ đề 1.3 *Cho n là một số nguyên dương. Ta đặt*

$$g(x) = \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}x^n\right)^n. \tag{1.4}$$

Khi đó $g^{(n)}(0) = n!$.

Chứng minh. Ta có

$$g(x) = x^n \left(1 + \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{1}{n}x^{n-1}\right)^n = x^n h(x), \tag{1.5}$$

trong đó

$$h(x) = \left(1 + \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{1}{n}x^{n-1}\right)^n. \tag{1.6}$$

Áp dụng công thức Leibniz

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!j!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} x^n . \left(\frac{d}{dx}\right)^{j} h(x) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{n!n!}{(n-j)!j!j!} x^j . \left(\frac{d}{dx}\right)^{j} h(x). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Do đó, ta thu được

$$g^{(n)}(0) = n!h(0) = n!. \tag{1.8}$$

Bổ đề được chứng minh.

1.2. Phân thức hữu tỉ với hệ số nguyên và phân thức nhận giá trị hữu tỉ

Tiếp theo, ta nhắc lại một số tính chất của phân thức hữu tỉ với hệ số nguyên và các dạng phân thức nhận giá trị hữu tỉ trên tập số tự nhiên.

Định nghĩa 1.4 Hàm số f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là phân thức hữu tỉ nếu tồn tại các đa thức $P(x), Q(x)$ sao cho $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (1). Khi $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức nguyên tố cùng nhau thì (1) được gọi là phân thức hữu tỉ chính tắc.

Nếu đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức có hệ số hữu tỉ thì bằng việc quy đồng mẫu số ta sẽ đưa $f(x)$ về dạng $f(x) = \dfrac{P'(x)}{Q'(x)}$, trong đó $P'(x)$ và $Q'(x)$ là các đa thức có hệ số nguyên. Do vậy phân thức hữu tỉ $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ được gọi là phân thức hữu tỉ có hệ số nguyên nếu như $P(x), Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

Bài toán 1.1 Cho phân thức hữu tỉ $f(x) = \dfrac{1}{ax+b} \in \mathbb{Q}$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $a, b \in \mathbb{Q}$.

Lời giải. Vì $f(x) = \dfrac{1}{ax+b} \in \mathbb{Q}$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$ nên $ax + b = \dfrac{1}{f(x)}$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Vậy $ax + b \in \mathbb{Q}[x]$ hay $a, b \in \mathbb{Q}$.